Tipps zur Serie 7:

Aufgabe 7.1:

- Orthogonalität und Orthogonalprojektion repetieren & anwenden (Theorie 8)

e) Benützt die schwarz'sche Ungleichung

f) Definition der Einheitsvektoren betrachten

Aufgabe 7.2:

a) Überlegt euch, was die Monombasis vom $\mathcal{P}_2$ (Achtung: Achtet auf die Definition des $\mathcal{P}_2$ für diese Aufgabe) ist, und überlegt für jedes Basiselement, was die Anwendung von L_2 bewirkt (der Ausgang der Abb. ist <u>immer</u> ein 2-D Vektor, wie ihr in der Aufgabenstellung seht.

b) Einfach die Legendre Polynome in die Definition des Skalarproduktes auf diesem VR stecken.

c) Entweder gleich wie in a) vorgehen, oder aber einen Basiswechsel vollführen.

d) Betrachtet auch $d=1$ und schreibt eine Lösung in Abhängigkeit von d.

e) Zeigen, dass B_{kern} im Kern enthalten ist: Zeigt, dass $\mathcal{L}_d(p_i)$ für alle Basisvektoren in $B_{kern} = 0$ ist (findet eine allgemeine Formel, könnts ja nicht für alle zeigen).

Zeigen, dass alle Basisvektoren linear unabhängig sind: Das ist Tricky, stellt die Matrix auf, welche das lineare Gleichungssystem beschreibt, welches für lineare unabhängigkeit nur die triviale Lösung haben darf. Darin müsst ihr ein Muster erkennen (Es wäre eine $d+1 \times d-1$ - Matrix, ihr <u>könnt</u> <u>nicht</u> alles aufschreiben), so, dass ihr die Matrix durch systematisches addieren von Zeilen vereinfachen könnt. Ihr müsst schlussendlich in der Lage sein, zu zeigen, dass wirklich nur die triviale Lösung stimmt.

f) Ihr habt in b) gezeigt, dass die 3 Legendre-Polynome orthonormal zueinander stehen, daraus folgt direkt (aufgrund der Dimension des $\mathcal{P}_2$), dass diese eine orthonormale Basis des $\mathcal{P}_2$ bilden.

Jede Orthogonalprojektion bzgl. dieser Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{P_0, P_1, P_2\}$ ist also wie folgt gegeben:

$$P_{\mathcal{P}_2[-1,1]}(p) = \sum_{i=0}^{2} \langle p, P_i \rangle P_i = ?$$

Eure Aufgabe ist es jetzt, für die allg. Vektoren die 3 Projektionen mittels dem Skalarprodukt zu bestimmen und diese dann in die obige Summe zu einem allg. Resultat zusammenzusetzen.

Aufgabe 7.3:

a) Stellt erst die Matrix $\underline{\underline{D}}$ sauber auf und berechnet das Ergebnis des Skalarproduktes allgemein. überprüft mit diesem Ergebnis dann die Axiome des Skalarproduktes.

b) Schaut in der Theorie die Definition der induzierten Norm nach.

Aufgabe 7.4:

- Einfach dem Kochrezept im Skript folgen

b) Eigenschaften einer orthonormalen Basis ausnutzen (Matrix $\underline{\underline{B}}$ wird orthogonal sein)

Aufgabe 7.5:

- Gleich wie 8.2, einfach mit dem neuen, gegebenen Skalarprodukt

Aufgabe 7.6:

a) Einfach Definition orthogonaler Vektoren überprüfen (für die Paare f_m & f_n, g_m & g_n und f_n & g_m

b) Definition der Norm anwenden

Aufgabe 7.7:

a) Vektorprodukt anwenden

b) Überlegen, welche beiden Vektoren die Ebene aufspannen.

a, b, c entsprechen den Koordinaten des Normalvektors, d findet man heraus, indem man einen Punkt auf der Ebene einsetzt.

Aufgabe 7.8:

- Ebenengleichungen / Geradengleichung gleichsetzen und so Schnittgerade / Schnittpunkt finden

c) Überlegen, wie die Schnittgerade zu beiden Ebenen steht.

Aufgabe 7.9:

- Stellt eine Bedingung für den Projektionsvektor von P auf g auf und überlegt euch allgemein, wie dieser Vektor aussehen muss.

Aufgabe 7.10:

- Zeichnet euch die Abbildungen auf und überlegt euch, was mit den Einheitsvektoren bei der Abbildung geschieht. Die gesuchte Matrix besteht aus den abgebildeten Einheitsvektoren $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ & $e^{(3)}$. (Also normal die Abbildungsmatrix aufstellen)

b) Verkettung von Abbildungen repetieren (Theorie 7)